



Geometría al alcance de la mano

Taller de Talento Matemático de Navarra

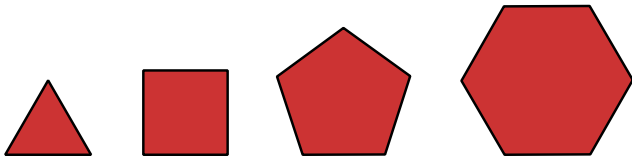
Nafarroako Matematika-Talentu Tailerra

Pamplona, 27 de septiembre de 2024

¿Qué es esto?

El material que veis se llama **PLOT** (iniciales de **P**oitiers, **L**imoges, **O**rléans, **T**ours), y sirve para experimentar con cuerpos geométricos en dos y tres dimensiones. Fue creado en **Francia** alrededor de 1980.

- Cada pieza es un **polígono regular**. ¿Qué es un polígono regular?
- El **lado** de todas las piezas tiene la **misma longitud**.
- Las piezas son **triángulos**, **cuadrados**, **pentágonos** y **hexágonos** (aunque también hay octógonos y decágonos).



¿Qué es esto?

- Las piezas tienen unas «pestañas» que permiten **unirlas** con gomas.
- Así, podemos construir **poliedros** de manera sencilla, sin pegamento.
- Por cierto... ¿Qué es un poliedro?

(Además... Las piezas son de diferentes colores, con lo que nuestros poliedros quedan muy chulos).

¡Os toca a vosotros/as!

El objetivo es que cada grupo trate de formar **todos los poliedros distintos que pueda** con las piezas que os hemos dado.

Algunas conclusiones...

Vamos a poner en común algunas conclusiones tras haber experimentado:

¿Qué poliedro(s) habéis construido con los **pentágonos**?

Respuesta: solo uno, el **dodecaedro**.

¿Qué poliedro(s) habéis construido con los **cuadrados**?

Respuesta: solo uno, el **cubo** o **hexaedro**. ¿Se pueden unir cuatro en un mismo punto?

¿Qué poliedro(s) habéis construido con los **hexágonos**?

Respuesta: además de las manos... ¡Hay que usar la cabeza!

¿Qué poliedro(s) habéis construido con los **triángulos**?

Respuesta: el **tetraedro**, el **octaedro** y el **icosaedro**. ¿Alguno más... raro?

Resumimos

Al experimentar con las piezas, hemos podido identificar, al menos...



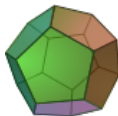
Tetraedro
(cuatro caras)



Hexaedro
(seis caras)



Octaedro
(ocho caras)



Dodecaedro
(doce caras)



Icosaedro
(veinte caras)

Los anteriores se denominan **poliedros regulares** o **sólidos platónicos**.

Estos poliedros son cuerpos geométricos cuyas caras son, todas ellas, polígonos regulares congruentes, de tal manera que en cada vértice se junta el mismo número de caras.

Además, puede que algunos compañeros hayan descubierto otros poliedros formados por triángulos equiláteros. Estudiaremos estos cuerpos más adelante.

Poliedros regulares

¿Cuántas caras (C), aristas (A) y vértices (V) tienen los poliedros?

¿Podemos deducir el número de **aristas** sabiendo el número de caras?

Pista: en cada arista se juntan exactamente **dos** caras.

¿Podemos deducir el número de **vértices** sabiendo el número de caras?

Pista: en cada vértice concurren **tres, cuatro o cinco** caras.

Poliedro	Caras	Aristas	Vértices
Tetraedro	4	6	4
Cubo	6	12	8
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	30	20
Icosaedro	20	30	12

Poliedros regulares

Por lo que nos hemos encontrado hasta ahora, parece que podemos enunciar el siguiente...

Teo... Teo... Teo...

¡¡Teorema!!

Teorema

Solo existen **cinco** poliedros regulares.

Pero esto... ¡Habrá que demostrarlo!  De verdad no puede haber más que cinco?  Por qué?

No vale decir «porque lo dijo el profesor»...

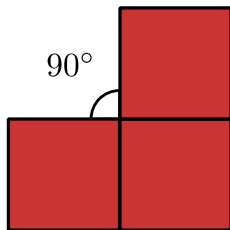
Poliedros regulares (demostración)

- 1 Con cuadrados solo se puede construir un cubo, ya que la única posibilidad es que concurren tres de ellos en un vértice (con 2 es imposible y con 4 hacemos un embaldosado plano).
- 2 Con el pentágono no se pueden juntar más de tres, con lo que solo hay un poliedro con caras pentagonales.
- 3 Con el hexágono no se puede construir cuerpos en el espacio, únicamente obtenemos un embaldosado.
- 4 Con polígonos de más lados que el hexágono es también imposible, ya que el ángulo que forman los lados es cada vez mayor.
- 5 Con triángulos tenemos varias posibilidades: concurriendo tres caras en un vértice tenemos el tetraedro; concurriendo cuatro, queda el octaedro, y concurriendo cinco, el icosaedro. No pueden concurrir más caras en un solo vértice.

¡Demostración terminada!

Otra observación

Vamos a fijarnos en lo que ocurre al desarrollar las tres caras que concurren en un vértice del cubo:

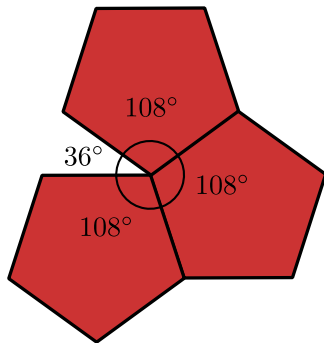


Observamos que le faltan 90° para completar una vuelta.

Como el cubo tiene 8 vértices, el «defecto total» es: $8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$.

Otra observación

¿Qué ocurre si hacemos lo mismo con el dodecaedro?

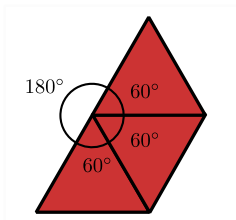


Observamos que le faltan 36° para completar una vuelta.

Como el dodecaedro tiene 20 vértices, queda: $20 \cdot 36^\circ = 720^\circ$.

Otra observación

¿Y con el tetraedro?

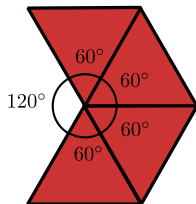


Observamos que le faltan 180° para completar una vuelta.

Como el tetraedro tiene 4 vértices, el «defecto total» es: $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Otra observación

Vaya casualidad... ¿Y pasa lo mismo con el octaedro?

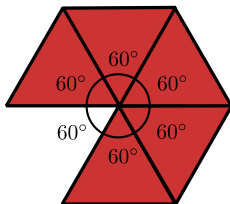


Observamos que le faltan 120° para completar una vuelta.

Como el octaedro tiene 6 vértices, resulta: $6 \cdot 120^\circ = 720^\circ$.

Otra observación

¡Venga ya! ¿Y con el icosaedro también pasa?



Observamos que le faltan 60° para completar una vuelta.

Como el icosaedro tiene 12 vértices, tenemos: $12 \cdot 60^\circ = 720^\circ$.

Así, observamos que en todos los poliedros regulares, el «defecto total» de estos poliedros es igual a 720° , es decir, dos circunferencias completas de 360° .

¡Lo anterior no es casualidad, sino que es un **teorema** que ya observó **Descartes**!

Vamos a centrarnos ahora en los poliedros que podemos construir utilizando únicamente **triángulos equiláteros**. A estos poliedros se les llama **deltaedros**, ya que la letra griega Δ («delta», nuestra «D») se parece a un triángulo.

¿Qué poliedro(s) habéis construido con los **triángulos equiláteros**?

Deltaedros

Para ayudaros, podéis utilizar esta tabla:

Deltaedro	Caras	Aristas	Vértices (nº caras)			Total V
			3 C	4 C	5 C	
Tetraedro	4	6	4	0	0	4
Octaedro	8	12	0	6	0	6
Icosaedro	20	30	0	0	12	12

Antiprismas

Vamos a comparar el icosaedro y el «platillo volante».

Si al icosaedro le cortamos dos pirámides pentagonales, obtenemos un poliedro formado por dos pentágonos y 10 caras triangulares. Este tipo de poliedros forman una familia infinita, los **antiprismas**.

Antiprisma	Caras		Total C	Aristas	Vértices
	Distintas	Triángulos			
Antiprisma 5	2 de 5	10	12	20	10
Antiprisma 6	2 de 6	12	14	24	12
Antiprisma 8	2 de 8	16	18	32	16
Antiprisma 10	2 de 10	20	22	40	20
Antiprisma n	2 de n	2n	$2n + 2$	4n	2n

Antiprismas

¿Qué pasaría si colocamos los polígonos de los antiprismas de forma que queden completamente paralelos?

Al colocar los polígonos completamente paralelos y unir sus lados con cuadrados, obtenemos una familia infinita de poliedros llamados **prismas**.

Prisma	Caras		Total C	Aristas	Vértices
	Distintas	Cuadrados			
Prisma 5	2 de 5	5	7	15	10
Prisma 6	2 de 6	6	8	18	12
Prisma 8	2 de 8	8	10	24	16
Prisma 10	2 de 10	10	12	30	20
Prisma n	2 de n	n	$n + 2$	3n	2n

Una última fórmula...

Durante toda la sesión nos hemos encontrado con una relación que se cumple para todos los poliedros que hemos investigado: poliedros regulares, deltaedros, antiprismas y prismas.

En todos los poliedros que hemos construido, al hacer el cálculo del número de **C**aras menos el número de **A**ristas más el número de **V**értices hemos obtenido:

$$C - A + V = 2$$

Este bello resultado es cierto para todos los poliedros «sin agujeros» y se conoce como **fórmula de Euler**.



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

info@ttmna.org